

INSTITUT GEOGRAPHIQUE NATIONAL

Service de la Documentation Technique

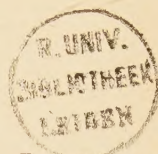
RESUME DE LA THESE DE L'INGENIEUR GEOGRAPHE M. DUPUY
SUR L'INTERPOLATION COMPLEXE
ET SES APPLICATIONS EN GEODESIE ET CARTOGRAPHIE



1953

~~JUIN 1958~~

RESUME DE LA THESE DE M. DUPUY SUR L'INTERPOLATION COMPLEXE
ET SES APPLICATIONS EN GEODESIE ET CARTOGRAPHIE



Thèse principale⁽¹⁾ soutenue à Paris le 24 Janvier 1953
devant le Jury de la Faculté des Sciences :

MM. Les Professeurs J. PERES, G. DARNOIS et R. THIRY

Ce travail a été publié par l'Institut Géographique
National, comme Publication Technique de l'I.G.N. (1954).

Le mémoire comprend deux parties, comme l'indique le
titre :

- la première, consacrée à l'étude générale de l'interpo-
lation des fonctions d'une variable complexe,

- la seconde, aux applications de la méthode en Géodésie
et en Cartographie, notamment pour la construction des cartes et la
transformation des coordonnées d'un système rectangulaire conforme
à un autre.

La première partie du travail est consacrée à l'étude
formelle de l'interpolation polynomiale dans le plan complexe, on
entend par là, l'étude des diverses méthodes utilisables pour expri-
mer et calculer dans le plan complexe un polynôme d'interpolation
défini par une certaine "base" donnée (ensemble de points $U_1(z_1)$
 $U_2(z_2)$ $U_i(z_i)$ ).

(1) Les questions posées par la Faculté se rapportaient à la réso-
lution des systèmes d'équations linéaires par approximations succes-
sives : travaux de FRIEDERICH.

On distingue trois procédés principaux de calcul :

1 - emploi de la formule de LAGRANGE, en effectuant l'étude détaillée des coefficients "barycentriques" α_i (tels que $y = \sum_i \alpha_i y_i = y_i$) et des simplifications qu'ils reçoivent pour des bases particulières (polygones ...)

2 - construction d'interpolées d'ordre croissant par "composition progressive" (on fait intervenir les points de la base succes-
sivement, comme dans la formule des différences divises

$$y(x) = y(a) + (x-a) BA + (x-a)(x-b) CBA \text{ etc...}$$

mais en se servant exclusivement de l'algorithme de l'interpolation linéaire).

3 - Présentation du polynôme d'interpolation sous la forme ordonnée, explicite...

$$U_0 = U + \alpha \Delta u + \beta \Delta u^2 + \dots + \lambda \Delta u^n$$

(forme la plus commode pour les calculs en série). Obtention des coefficients $U_0, \alpha, \beta, \dots, \lambda$, d'après la "base".

La méthode N° 2 peut être appliquée avantageusement en Géodésie pour l'adaptation des réseaux de triangulation. On peut en effet, traiter cette question comme un problème de représentation conforme par interpolation Lagrangienne. La "base" étant, par essence irrégulière, le procédé de composition d'interpolations linéaires est à utiliser; il s'applique sans peine au moyen de constructions géométriques très simples et fournit des résultats qui répondent bien aux exigences du problème.

La méthode N° 3 est étudiée surtout en rapport avec l'utilisation des tables de fonctions complexes (tables à double entrée en forme de grille); elle montre que les dérivées de $U(z)$ peuvent être facilement déduites d'après les valeurs numériques de la grille (formules générales de la différentiation numérique complexe).

Comme conséquences de ces études générales, on montre que la sous-tabulation d'une fonction complexe (ou resserrement de la grille) est très rapide, surtout lorsqu'est atteinte une densité de la grille qui autorise l'approximation par polynôme de degré 4 ou 3; dans ce dernier cas, l'algorithme de LIEBMANN (qui est une simple moyenne et est débarrassé des symboles complexes i) est rigoureux.

Enfin, l'on compare la précision respective de l'interpolation complexe et de l'interpolation usuelle des fonctions d'une variable, car les deux procédés peuvent être envisagés concurremment pour traiter les problèmes. L'interpolation complexe est la plus précise, à cause de la disposition plus favorable de sa "base".

Cette première partie du mémoire de M. DUPUY utilise, en les généralisant, des idées et des travaux américains récents de MM. SALZER et A. LOWAN. Les résultats et formules de la maille carrée se rapprochent des formules de BICKLEY et WOODWARD (publiées dans deux revues britanniques en 1948). Les applications aux adaptations des réseaux triangulés se rapprochent aussi de travaux récemment publiés (MM. LAUF et HENDRICKZ, Empire Survey Review, 1951 et 1952), mais elles sont obtenues indépendamment de ceux-ci et suggèrent une méthode d'exécution pratique différente.

La deuxième partie du travail étudie les avantages de l'utilisation des méthodes numériques de l'interpolation complexe pour les cartes et les projections de celles-ci.

L'application pratique de la théorie des fonctions de variable complexe apparaît en effet dans toutes les questions où interviennent des systèmes orthogonaux isothermes et des transformations conformes planes. Par là, elle intéresse la Cartographie et la Géodésie. En effet, la transformation des coordonnées rectangulaires d'une projection à une autre, d'une part, le tracé des courbes du "canavas" : méridiens et parallèles (qui sont les "images" des lignes droites de la carte de Mercator),

sur une projection conforme quelconque, d'autre part, sont deux aspects particuliers du problème de la représentation conforme du plan sur lui-même, et donnent lieu, par conséquent, à une application étendue des résultats rassemblés dans la première partie.

L'emploi de la méthode générale se présente ici de la manière suivante :

avec les tables existantes des diverses projections géographiques, il est possible de construire, par des calculs numériques directs, des "bases" choisies en vue de l'interpolation complexe; à ces "bases", on donnera normalement la forme carrée, la plus commode; la question est d'étudier la précision fournie par l'interpolation dans ces bases.

Au point de vue pratique : soit un problème de transformation de projection, intéressant une région donnée, devant être calculé avec une précision donnée; la question qui nous occupe est de prévoir quelle doit être la densité et la disposition de la base à calculer au départ afin d'obtenir la meilleure économie des calculs.

L'on est ainsi conduit à étudier la valeur du reste de l'interpolation complexe à base carrée de 5 ou 4 points pour des mailles de quelques centaines de km, dans les divers exemples de transformations $U(z)$ qui se présentent en Géodésie.

Pour des passages entre projections voisines⁽¹⁾, comme des zones LAMBERT adjacentes ou des fuseaux MERCATOR TRANSVERSE (... GAUSS KRUGER) adjacents (ou de l'une de ces projections à l'autre), l'interpolation complexe à 5 ou à 4 points fournit une précision de l'ordre du mm pour des mailles de quelques centaines de km d'amplitude.

(1) au sens des géodésiens : les méridiens (ou parallèles) centraux sont éloignés de quelques degrés.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552428_0011

Le traitement d'un problème courant de transformation de coordonnées géodésiques peut donc être réduit au calcul numérique de 5 points en dispositif carré, et à l'emploi des formules d'interpolation complexe. On donne bien entendu les formules précises du reste dans tous les cas (dans le cas du passage entre zone LAMBERT ou MERCATOR TRANSVERSE, il est proportionnel à la distance des "lignes de base").

La transformation des coordonnées LAMBERT ou MERCATOR TRANSVERSE, aux coordonnées de MERCATOR, et vice versa, est, en principe, un simple cas particulier du problème précédent. Néanmoins, l'équateur, "ligne de base" de la projection MERCATOR, étant en général très éloigné de la zone intéressée, les restes d'interpolation sont plus importants. La précision atteinte par l'interpolation à 4 points (algorithme de LIEBMANN), dans une maille d'une centaine de km de rayon, à nos latitudes, est de l'ordre de 2 à 3 cm. L'interpolation à 5 points donne une précision meilleure que le mm. L'emploi de la méthode complète est donc très avantageux pour ce problème. Le bénéfice obtenu est caractérisé par le fait que les dix nombres, correspondant à la base à 5 points, suffisent à déterminer numériquement la transformation, là où 2 pages de tables (comprenant 800 nombres environ) sont nécessaires avec les formules usuelles de transformation.

On envisage enfin l'application de la méthode au problème de la construction des cartes "périodiques quadrifocales" (planisphères de PEIRCE et GUYOU), problème auquel on a reconnu que s'assimilait celui du tracé des hyperboles sphériques sur les cartes. L'avantage d'un procédé d'interpolation est patent pour cette question, où l'obtention individuelle de chaque point exige des calculs spécialement longs et compliqués. Un exemple numérique est traité au sujet du tracé d'un faisceau d'hyperboles sphériques ayant un écartement focal de 10° d'arc (600'), et on constate ainsi que la donnée numérique d'une base carrée à 5 points définit le système avec toute la précision désirable dans un vaste secteur. Il convient de noter ici que la méthode de tracé d'hyperboles sphériques sur des projections conformes au moyen de polynômes d'interpolation

en variable complexe a été utilisée avec succès en 1953-1954 pour la réalisation de cartes DECCA par l'Institut Géographique National, étant mise en oeuvre par un calculateur électronique I.B.M. à programme par cartes, pour lequel l'élaboration d'une expression polynômiale complexe est une opération facile à organiser, et rapide.

Tous les résultats numériques mentionnés ci-dessus sont atteints à l'issue d'une étude analytique de chaque problème, étude dans laquelle la convergence des développements en série de $U(z)$ est prévue à l'aide des théorèmes généraux, et en tenant compte des particularités géométriques de chaque problème.

La connaissance des points singuliers des transformations $U(z)$ (... image des pôles Nord et Sud, images des pseudo-pôles des systèmes MERCATOR TRANSVERSE...) que l'on possède à priori, fournit le rayon de convergence et définit la décroissance des termes d'une manière assez précise. Ce "critère du rayon de convergence" donne au calculateur une indication approchée, pratiquement suffisante, pour la détermination de la base (nombre de points à calculer, et leur espacement). Dans certains cas, la discussion du problème est presque évidente (transformations mutuelles entre zones LAMBERT ou MERCATOR).

A l'occasion de la transformation entre fuseaux MERCATOR TRANSVERSE voisins, on est amené à approfondir l'étude du tracé d'une ligne géodésique sur la projection de MERCATOR. Employant une méthode déjà introduits par HRISTOW, mais perfectionnée, on parvient avec une relative aisance à des expressions développées en série jusqu'au 5ème ordre inclus, avec la possibilité d'apprécier l'ordre de grandeur exact des effets des termes successifs.

Dans toute cette 2ème partie de son mémoire, M. DUPUY développe des idées qui se trouvent signalées et utilisées déjà assez largement dans certaines publications américaines

sur la projection de MERCATOR TRANSVERSE (1).

Le sujet général des transformations de coordonnées conformes a fait l'objet de très nombreux travaux dans la littérature géodésique récente, notamment chez les auteurs allemands. M. DUPUY a retenu surtout les résultats de l'oeuvre très complète et imposante de HRISTOW. L'étude du tracé des lignes géodésiques l'a amené à approfondir ces études de HRISTOW ainsi que celles de BOAGA et de MARUSSI sur cet intéressant sujet.

En conclusion, il paraît démontré que le point de vue de l'interpolation complexe permet des simplifications notables, ayant une indéniable valeur pratique, pour ces applications géodésiques et cartographiques, où le Calcul Numérique porte sur des fonctions complexes d'une écriture formelle délicate, et qui sont donc le plus commodément définies par un groupe de valeurs numériques bien choisies.

Les mêmes avantages devraient pouvoir s'affirmer dans plusieurs autres applications techniques, où se rencontrent des problèmes numériques de même nature.

-ooOoo-

(1) notamment ...

- A.M.S. Technical Manual N° 19 :
"Universal Transverse Mercator Grid" (Chapitre V)
- A.M.S. Technical Manual N° 50 :
"Zone to Zone transformation tables"

